Total Pages : 8

KN-237

B.Sc. (Part-III) Examination, 2022

(NewCourse)

MATHEMATICS

(Abstract Algebra)

[Paper : Second]

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Passing Marks : 17

Note : Solve **any two** parts from each question. All questions carry **equal** marks.

प्रत्येक प्रश्न के **किन्हीं दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक **समान** हैं।

Unit - I / इकाई - I [5x2=10]

1. (a) Show that $t \to t^{-1}$ is an automorphism of group G if and only if G is abelian.

दिखाइए कि $t \to t^{-1}$ समूह G की स्वाकारिता है यदि और केवल यदि G आबेली हो।

(b) Prove that every abelian group of order 6 is cyclic.

सिद्ध कीजिए कि कोटि 6 के सभी आबेली समूह चक्रीय होते हैं।

(c) If K is a p-sylow subgroup of G and $x \in G$, then $x^{-1}Kx$ is also a p-sylow subgroup of G.

यदि K, समूह G का p-साइलो उपसमूह है और $x \in G$, तब $x^{-1}Kx$, भी समूह G का p-साइलो उपसमूह होगा।

Unit - II / इकाई - II [5x2=10]

2. (a) Union of two ideals S and T of a ring R is an ideals of R if and only if either $S \subseteq T$ or $T \subseteq S$.

एक वलय R की दो गुणजावलियाँ S और T के लिए SUT, R की गुणजावली होती हैं यदि और केवल यदि या तो $S \subseteq T$ या $T \subseteq S$.

(b) Find the degree of

$$\left[f(x)+g(x)\right], f(x)g(x), h(x)h(x)h(x)$$

where the polynomials are on the integers (mod 8) and operations are addition and multiplication and

$$f(x)=2x+4x^2,\ g(x)=2+6x+4x^3,$$

$$h(x)=2+4x.$$

$$\left[f(x)+g(x)\right], f(x)g(x), h(x)h(x)h(x)$$

के घात ज्ञात कीजिए जहाँ बहुपद, (mod 8) के पूर्णांकों पर है और संक्रियाएँ योग और गुणा हैं तथा

$$f(x)=2x+4x^2,\ g(x)=2+6x+4x^3,$$

$$h(x)=2+4x.$$

(c) Prove that : The range of homomorphism is a submodule.

सिद्ध कीजिए : समाकारिता का परिसर एक उपप्रतिरूपक है।

Unit - III / इकाई - III [5x2=10]

3. (a) Let $V(R)$ be the vector space of complete real continuous functions. Then show that the solution set W of differential equation

$$\frac{2d^2y}{dx^2}-\frac{9dy}{dx}+2y=0$$

where $y=f(x)$ is the subspace of V.

माना $V(R)$ पर सम्पूर्ण वास्तविक मान वाले सतत् फलनों का सदिश समष्टि है तब दर्शाइये कि अवकल समीकरण

$$\frac{2d^2y}{dx^2}-\frac{9dy}{dx}+2y=0$$

जहाँ $y=f(x)$ का हल समुच्चय W, V का एक उपसमष्टि है।

(b) Prove that : The linear span $L(S)$ of any subset of S of a vector space $V(F)$ is a subspace of V generated by S.

सिद्ध कीजिए : किसी सदिश समष्टि $V(F)$ के किसी उपसमुच्चय S की रैखिक विस्तृति $L(S)$ S द्वारा जनित V की एक उपसमष्टि होती है।

(c) State and prove : 'Extension theorem'.

लिखकर, सिद्ध कीजिए : 'विस्तार प्रमेय'।

Unit - IV / इकाई - IV [5x2=10]

4. (a) What is fundamental theorem of vector space homomorphism ? Explain.

सदिश समष्टि समाकारिता का मूलभूत प्रमेय क्या है ? समझाइए।

(b) State and prove : 'Rank Nullity theorem'.

लिखकर, सिद्ध कीजिए : 'कोटि शून्यता प्रमेय'।

(c) Write down the quadratic form corresponding to the symmetric matrix A, where

$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n)$.

विकर्ण आव्यूह $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n)$ के संगत द्विघाती समघात को ज्ञात कीजिए।

Unit - V / इकाई - V [5x2=10]

5. (a) If $\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2) \in V_2(R)$, then show that $V_2(R)$ be an inner product space for the inner product $(\alpha, \beta) = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2$ defined on $V_2(R)$.

यदि $\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2) \in V_2(R)$ तब $(\alpha, \beta) = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2$ से परिभाषित गुणन, $V_2(R)$ पर आन्तर गुणन है, सिद्ध कीजिए।

(b) Prove that if α and β are vectors in a unitary space, then :

(i) $4(\alpha, \beta) = \|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha - \beta\|^2 + i\|\alpha + i\beta\|^2 - i\|\alpha - i\beta\|^2$

(ii) $(\alpha, \beta) = \operatorname{Re}(\alpha, \beta) + i \operatorname{Re}(\alpha, i\beta)$

यदि ऐकिक समष्टि में α एवं β दो सदिश हों तब सिद्ध कीजिए कि :

(i) $4(\alpha,\beta)=\|\alpha+\beta\|^2-\|\alpha-\beta\|^2+$

$i\|\alpha+i\beta\|^2-i\|\alpha-i\beta\|^2$

(ii) $(\alpha,\beta)=\operatorname{Re}(\alpha,\beta)+i\operatorname{Re}(\alpha,i\beta)$

(c) State and prove : Bessel's Inequality for finite dimensional spaces.

परिमित विमीय समष्टि पर बे०सल की असमिका, लिखकर, सिद्ध कीजिए।

----x----