

Total Pages : 8

KN-205

B.Sc. (Part-II) Examination, 2022

(New Course)

MATHEMATICS

(Advanced Calculus)

[Paper : First]

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Passing Marks : 17

Note : All questions are **compulsory**. Answer **any two** parts from each question/unit. All questions carry **equal** marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न/इकाई से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Unit - I / इकाई - I

1. (a) Prove that the sequence $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, where

$$s_n = \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 2}, \text{ is monotonic increasing. If}$$

$n \rightarrow \infty$, then find its limit.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, जहाँ $s_n = \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 2}$,

एकदिष्ट वर्धमान है। यदि $n \rightarrow \infty$ तब इसकी सीमा ज्ञात कीजिए।

- (b) Test the convergence or divergence of the following series :

$$1 + \frac{2x}{\underline{2}} + \frac{3^2 x^2}{\underline{3}} + \frac{4^3 x^3}{\underline{4}} + \dots, x > 0$$

निम्नलिखित श्रेणी अभिसरण या अपसरण का परीक्षण कीजिए :

$$1 + \frac{2x}{\underline{2}} + \frac{3^2 x^2}{\underline{3}} + \frac{4^3 x^3}{\underline{4}} + \dots, x > 0$$

- (c) Prove that every absolutely convergent series is convergent but not conversely.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक निरपेक्ष अभिसारी (परम अभिसारी) श्रेणी अभिसारी होती है, किन्तु विलोम सदैव सत्य नहीं है।

Unit - II / इकाई - II

2. (a) Test the continuity and differentiability of the following function at $x = 2$:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{if } x \leq 2 \\ 5-x, & \text{if } x \geq 2 \end{cases}$$

फलन :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{यदि } x \leq 2 \\ 5-x, & \text{यदि } x \geq 2 \end{cases}$$

की सांतत्यता एवं अवकलनीयता की जाँच $x = 2$ पर कीजिए।

- (b) Verify Rolle's theorem for the following functions :

(i) $f(x) = \tan x$, where $0 \leq x \leq \pi$

(ii) $f(x) = x(x+3)e^{-x/2}$ in the interval $[-3, 0]$.

निम्नलिखित फलनों के लिए रोले प्रमेय की व्याख्या कीजिए :

(i) $f(x) = \tan x$, जहाँ $0 \leq x \leq \pi$

(ii) $f(x) = x(x+3)e^{-x/2}$ अन्तराल $[-3, 0]$ में

(c) Verify first mean value theorem for the following function :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

प्रथम माध्यमान प्रमेय का निम्नलिखित फलन के लिए सत्यापन कीजिए :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

Unit - III / इकाई - III

3. (a) Let

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{when } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ when } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Find by definition the values $f_x(0, 0)$

and $f_{xy}(0,0)$. Also, compute $f_y(0,0)$, $f_{xx}(0,0)$, $f_{yy}(0,0)$ and $f_{yx}(0,0)$.

माना

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{जब } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ जब } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

परिभाषा से निम्न के मानों को ज्ञात कीजिए :

$f_x(0,0)$ तथा $f_{xy}(0,0)$ साथ ही $f_y(0,0)$, $f_{xx}(0,0)$, $f_{yy}(0,0)$ एवं $f_{yx}(0,0)$ का अभिकलन कीजिए।

(b) Transform the equation :

$$x^4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x^3 \frac{dy}{dx} + x^2 y = 0$$

by the substitution $x = \frac{1}{z}$.

प्रतिस्थापन $x = \frac{1}{z}$ के द्वारा समीकरण :

$$x^4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x^3 \frac{dy}{dx} + x^2 y = 0$$

को रूपान्तरित कीजिए।

(c) Prove that :

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \times \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = JJ' = 1$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \times \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = JJ' = 1$$

Unit - IV / इकाई - IV

4. (a) Find the envelope of curves $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$,

where the parameters a and b are connected by the relation $a^p + b^p = c^p$.

वक्रों $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$, का अन्वालोप ज्ञात कीजिए,

जहाँ प्राचल a तथा b सम्बन्ध $a^p + b^p = c^p$ द्वारा संबंधित है।

- (b) Find the minimum distance from the origin to the plane $x + 2y - 2z - 12 = 0$.

मूल बिन्दु से समतल $x + 2y - 2z - 12 = 0$ की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

- (c) Given that $x + y + z = a$, then find the greatest value of xyz .

दिया है कि $x + y + z = a$, तो xyz का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

Unit - V / इकाई - V

5. (a) Evaluate :

$$\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{a-x}} dx$$

using Beta and Gamma functions.

$\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{a-x}} dx$ का मान बीटा एवं गामा फलन की सहायता से ज्ञात कीजिए।

- (b) Evaluate :

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{dx \, dy \, dz}{(x+y+z+1)^2}$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{dx \, dy \, dz}{(x+y+z+1)^2}$$

(c) Change the order of integration in

$$I = \int_0^1 \int_y^1 x^2 \cos(x^2 - xy) \, dy \, dx$$

and hence evaluate it.

दिये गये समाकल के समाकलन का क्रम बदलिए :

$$I = \int_0^1 \int_y^1 x^2 \cos(x^2 - xy) \, dy \, dx$$

तथा इसका मूल्यांकन कीजिए।

-----X-----