Total Pages : 8

KN-176

B.Sc. (Part I) Examination, 2022

(New Course)

MATHEMATICS

(Vector Analysis and Geometry)

[Paper : Third]

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Mininum Passing Marks : 17

Note : Attempt **all five** questions. **two** sub-question from each unit are **compulsory**. **All** questions carry **equal** marks.

सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से **कोई दो** उप-प्रश्न करना **अनिवार्य** है। **सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं।

UNIT-I / इकाई-I

1. (a) Prove that vectors $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right), \vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)$ and $\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ are coplormass.

सिद्ध कीजिए कि सदिश $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right), \vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)$ तथा $\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ समतलीय है।

(b) Find the directional derivative of $\phi = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ at $(1,1,-1)$ in the direction of $2\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$. Also find maximum value of directional derivative at P.

$\phi = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ का दिक् अवकलज P $(1,1,-1)$ पर $2\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$ की दिशा में ज्ञात कीजिए। साथ ही P पर दिक् अवकलज का महत्तम मान ज्ञात कीजिए।

(c) Prove that :

$$\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$$

सिद्ध कीजिए :

$$\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$$

UNIT-II / इकाई–II

2. (a) Evaluate $\int_c \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}$ where $\vec{F} = x^2 y^2 \hat{i} + y\hat{j}$ and c is the parabola from $(0,0)$ to $(4,4)$.

$\int_c \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $\vec{F} = x^2 y^2 \hat{i} + y\hat{j}$ और वक्र xy-समतल में $(0,0)$ से $(4,4)$ तक परवलय $y^2 = 4x$ है।

(b) Find the value of $\iint_S \vec{F}.\hat{n}\, ds$ where S is surface of cube which is bounded by planes $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ and $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$.

समाकल $\iint_S \vec{F}.\hat{n}\, ds$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ S, ऐसे घन का पृष्ठ है जो कि समतलों $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ से घिरा है तथा $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$.

(c) Verify Green theorem for

$\int_C \left[\left(xy + y^2 \right) dx + x^2 dy \right]$ where C is boundary of area bounded by $y = x$ and $y = x^2$.

$\int_C \left[\left(xy + y^2 \right) dx + x^2 dy \right]$ के लिए C समतल में ग्रीन प्रमेय सत्यापित कीजिए जहाँ C, $y = x$ तथा $y = x^2$ से परिबद्ध क्षेत्र की परिसीमा है।

UNIT-III / इकाई-III

3. (a) Trace the conic :

$$21x^2 - 6xy + 29y^2 + 6x - 58y - 151 = 0$$

निम्नलिखित शांकव का अनुरेखण कीजिए :

$$21x^2 - 6xy + 29y^2 + 6x - 58y - 151 = 0$$

(b) Find the equation of circle which are perpendicular to both circles $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ and $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ and passes through origin.

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वृत्त $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ तथा $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ के लंबवत् है तथा मूल बिन्दु से गुजरता है।

(c) Prove that line $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ touches conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ if $(A - e)^2 + B^2 = 1$.

सिद्ध कीजिए कि रेखा $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ को स्पर्श करेगी यदि $(A - e)^2 + B^2 = 1$.

UNIT-IV / इकाई–IV

4. (a) Prove that two spheres $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 2z + 8 = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 8y + 4z + 20 = 0$ intersect orthogonally.

सिद्ध कीजिए कि दो गोले

$x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 2z + 8 = 0$ और

$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 8y + 4z + 20 = 0$

लांबिकतः प्रतिच्छेद करते हैं।

(b) Find the equation of cone whose vertex is $(0,0,3)$ and base curve is circle $x^2 + y^2 = 4, z = 0$.

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(0,0,3)$ और आधार-वक्र, वृत्त $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ है।

(c) Find the equation of right circular cone, whose radius is 2 and axis is unic $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$.

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 2 है तथा अक्ष, सरल रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ है।

UNIT-V / इकाई–V

5. (a) Find the equation of tangent planes of $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ which passes through the lines $3x - 3y + 6z - 5 = 0;\ x + 9y - 3z = 0$.

सरल रेखा $3x - 3y + 6z - 5 = 0;\ x + 9y - 3z = 0$ से जाने वाले $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ के स्पर्श तलों का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(b) Reduce the following equation in standard form :

$$2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x + 12y - 6z + 5 = 0$$

निम्न समीकरण का समानयन प्रमाणिक रूप में कीजिए :

$$2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x + 12y - 6z + 5 = 0$$

(c) Find the condition when plane $lx + my + nz = p$, touches parabola $ax^2 + by^2 = 2cz$.

प्रतिबंध ज्ञात कीजिए कि जब समतल $lx + my + nz = p$, परवलय $ax^2 + by^2 = 2cz$ को स्पर्श करता है।

----x----