Printed Pages : 7

SJ-237

B.Sc. (Part-III) Examination, 2021

MATHEMATICS

[Paper : Second]

(Abstract Algebra)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Passing Marks : 17

Note : Solve **any two** parts from each question. All questions carry equal marks.

प्रत्येक प्रश्न के **किन्हीं दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

UNIT - I / इकाई – I [5x2=10]

1. (a) Prove that the mapping $x \to x^{-1}$ on a group G to G is an automorphism if and only if G is abelian.

सिद्ध कीजिए कि फलन $x \to x^{-1}$ एक समूह G का स्वाकारिता है यदि और केवल यदि G आबेली है।

(b) State and prove third Sylow's theorem.

सिलो का तृतीय प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

(c) Let G be a group, f an automorphism of G. N is a normal subgroup of G. Prove that $f(N)$ from is a normal subgroup of G.

G एक समूह है, f, G का एक स्वाकारिता है, N G का एक प्रसामान्य उपसमूह है। सिद्ध कीजिए कि $f(N)$, G का एक प्रसामान्य उपसमूह है।

UNIT - II/ इकाई – II [5x2=10]

2. (a) For two ideals S and T of any ring R, $S \cup T$ is an ideals of R if and only if either $S \subseteq T$ or $T \subseteq S$.

किसी वलय R की दो गुणजावलियों S और T के लिए, $S \cup T$, R की एक गुणजावली होता है यदि और केवल यदि या तो $S \subseteq T$ या $T \subseteq S$.

(b) Find the greatest common divisor (gcd) of following polynomial defined on the field $(Q, + \cdot)$ and express it as a linear combination of two polynomial $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ $g(x) = x^3 - 1$.

बहुपदों $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ तथा $g(x) = x^3 - 1$ का महत्तम उभयनिष्ठ भाजक ज्ञात कीजिए जो क्षेत्र $(Q, + \cdot)$ में परिभाषित है तथा इसे दो बहुपदों के एक रैखिक संयोजन में व्यक्त कीजिए।

(c) Let M be an R-module and let A and B be two submodule of M. Then $A + B$ is also a submodule of M.

मान लीजिए M एक R-माड्यूल है तथा मान लीजिए A तथा B, M के दो उपमाड्यूल हैं तब $A + B$ भी M का एक उपमाड्यूल होता है।

UNIT - III/ इकाई - III [5x2=10]

3. (a) If W_1 and W_2 are two subspace of vector space $V(F)$, then intersection $W_1 \cap W_2$ is also a subspace of $V(F)$.

किसी सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियों W_1 और W_2 का सर्वनिष्ठ $W_1 \cap W_2$ भी $V(F)$ का एक उपसमष्टि है।

(b) State and prove Basis theorem.

आधार प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

(c) Prove that the net of vectors $(1,3,2),(1,-7,-8),(2,1,-1)$ is linearly dependent in $V_3(R)$.

सिद्ध कीजिए कि सदिशों $(1,3,2),(1,-7,-8),(2,1,-1)$ का समुच्चय सदिश समष्टि $V_3(R)$ में रैखिकतः परतंत्र है।

UNIT - IV/ इकाई – IV [5x2=10]

4. (a) Let $V(F)$ and $U(F)$ be vector space over the field F. Let $T:V \to U$ be a linear transformation from V onto U with kernel K, then $\frac{V}{K} \cong U$.

मान लीजिए $V(F)$ तथा $U(F)$ क्षेत्र F पर सदिश समष्टियाँ हैं, मान लीजिए Let $T:V \to U$, V आच्छादक U से एक रैखिक रूपान्तरण है जिसका कर्नेल K है, तब $\frac{V}{K} \cong U$.

(b) A linear transformation $T:V_3 \to V_2$ is defined as follows

$$T(e_1) = (2,1), T(e_2) = (0,1), T(e_3) = (1,1)$$

where $\{e_1, e_2, e_3\}$ is the standard basis of V_3. Find the range, null space of T and verify rank, nulity theorem.

एक रैखिक रूपान्तरण $T:V_3 \to V_2$ निम्न प्रकार से परिभाषित है

$$T(e_1) = (2,1), T(e_2) = (0,1), T(e_3) = (1,1)$$

जहाँ $\{e_1, e_2, e_3\}$ V_3 के प्रमाणिक आधार हैं। T का परिसर, शून्य समष्टि ज्ञात कीजिए तथा जाति शून्यता प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

(c) Show that the following matrix A is diagonalizable

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

दर्शाइये कि निम्न आव्यूह A विकर्णीय है।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

UNIT - V/ इकाई – V [5x2=10]

5. (a) If α and β are vectors in an inner product space $V(F)$;

$$\|\alpha+\beta\|^2 + \|\alpha-\beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

Interpret the result geometrically.

यदि α, β किसी आन्तर गुणन समष्टि $V(F)$ के सदिश हैं, तब दर्शाइये कि

$$\|\alpha+\beta\|^2+\|\alpha-\beta\|^2=2\|\alpha\|^2+2\|\beta\|^2$$

परिणाम की ज्यामितीय व्याख्या कीजिए।

(b) Apply the Gram-Schmidt orthogonalization process to obtain an orthonormal from the basis $B=\{B_1B_2B_3\}$ of $V_3(R)$ where $B_1=(1,0,0), B_2=(1,1,0)$ and $B_3=(1,1,1)$.

ग्राम-श्मिट के लांबिक प्रक्रम का उपयोग करके $V_3(R)$ के आधार $B=\{B_1B_2B_3\}$ से एक प्रसामान्य लांबिक आधार प्राप्त कीजिए जहाँ $B_1=(1,0,0), B_2=(1,1,0)$ तथा $B_3=(1,1,1)$.

(c) Prove that any orthonormal set of vectors in an inner product space is linearly independent.

सिद्ध कीजिए कि एक आन्तर गुणनसमष्टि में सदिशों का प्रसामान्य लांबिक समुच्चय रैखिक स्वतंत्र होता है।

----x----