

SJ-236

B.Sc. (Part-III) Main Examination, 2021

MATHEMATICS

[Paper : First]

(Analysis)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Passing Marks : 17

Note : All questions are **compulsory**. Attempt **any two** parts from each question. All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्नों के किन्ही दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Unit-I / इकाई-I

1. (a) Suppose $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \dots \geq 0$. Then

the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, if and only if the

series

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_2^k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots \text{ converges.}$$

माना $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \dots \geq 0$ तब श्रेणी

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ अभिसारी होगी यदि और केवल यदि श्रेणी

$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_2^k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$ अभिसारी होगी।

(b) Write and prove that "Schwarz's theorem".

“श्वार्ट्स प्रमेय” को लिखकर सिद्ध कीजिए।

(c) Obtain Fouries series for the expansion of $f(x) = x \sin x$ in the interval $(-\pi, \pi)$.

अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में परिभाषित फलन $f(x) = x \sin x$ का विस्तार फोरियर श्रेणी के रूप में ज्ञात कीजिए।

Unit-II / इकाई-II

2. (a) Let f be a bounded function on $[a, b]$ then prove that the insertion of an extra point of partition of $[a, b]$ does not decrease the lower sum.

माना f अन्तराल $[a, b]$ पर एक परिबद्ध फलन है, तब सिद्ध कीजिए कि अन्तराल $[a, b]$ के किसी विभाजन में एक अतिरिक्त बिन्दु लेने पर उपरि रीमान योग नहीं घटता।

- (b) Prove that : If f is monotonic on $[a, b]$ then $f \in R[a, b]$

सिद्ध कीजिए : यदि f अन्तराल $[a, b]$ पर एकदिष्ट फलन है, तब $f \in R[a, b]$

- (c) Show that $\int_a^b \frac{dy}{(y-a)^n}$ is convergent when $n < 1$ and divergent when $n \geq 1$.

दर्शाओ कि $\int_a^b \frac{dy}{(y-a)^n}$ अभिसारी है यदि $n < 1$ और अपसारी है यदि $n \geq 1$

Unit-III / इकाई-III

3. (a) Prove that : Real and imaginary parts of an analytic function satisfy Laplace's equation.

सिद्ध कीजिए : एक विश्लेषित फलन के वास्तविक एवं काल्पनिक भाग लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

- (b) If z_1, z_2 are complex numbers, then

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

यदि z_1, z_2 सम्मिश्र संख्याएं हो, तब

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

- (c) Explain necessary condition for $w = f(z)$ to represent a conformal mapping.

$w = f(z)$ को अनुकोण प्रतिचित्रण के रूप में दर्शाने के लिए आवश्यक प्रतिबंध को समझाइये।

Unit-IV / इकाई-IV

4. (a) For any metric space (X, d) , prove that
$$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$$

सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि (X, d) में
$$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$$
- (b) Write and prove "Canter's Intersection theorem".
“केन्टर सर्वनिष्ठ प्रमेय” को लिखकर सिद्ध कीजिए।
- (c) Prove that : The set Q of all rational numbers is not complete ordered field.
सिद्ध कीजिए : परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q पूर्ण क्रमित क्षेत्र नहीं है।

Unit-V / इकाई-V

5. (a) Prove that : A metric space (X, d) is separable if and only if it is second countable.
सिद्ध कीजिए : एक दूरीक समष्टि पृथक्करणी है यदि और केवल यदि यह एक द्वितीय गणनीय समष्टि है।

- (b) Explain : Sequential characterization of continuity.

विस्तार कीजिए : ‘सातत्य का अनुक्रमिक प्रगुण’

- (c) Prove that : Every indiscrete space is connected.

सिद्ध कीजिए : प्रत्येक तुच्छ समष्टि एक सम्बद्ध समष्टि होता है।

----X----