Printed Pages – 7

J-174

B.Sc. (Part-I) (Old Course)

Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - I

(Algebra and Trigonometry)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Answer any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) दर्शाइये कि R^3 का उपसमुच्चय {(3, 4, –1), (1, 2, 0), (1, 0, –1)} रैखिकतः परतंत्र है।

Show that the subset {(3, 4, –1), (1, 2, 0), (1, 0, –1)} of R^3 is linearly dependent.

(b) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ का अभिलाक्षणिक समीकरण ज्ञात कीजिये और सत्यापित कीजिये कि यह A द्वारा सन्तुष्ट होता है और इसका प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिये।

Find the characteristic equation of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ and verify that it is satisfied by A and hence find A^{-1}.

(c) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ का आइगेन मान और आइगेन सदिशों को प्राप्त कीजिये।

Find the eigen values and eigen vectors for the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (a) हल कीजिये :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$

Solve :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$

(b) वह प्रतिबंध ज्ञात कीजिये जब समीकरण $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ के दो मूल α, β इस प्रकार हैं कि $\alpha + \beta = 0$

Find the condition that the two roots α, β of the equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ are such that $\alpha + \beta = 0$.

(c) समीकरण $x^3 - px + q = 0$ के दो मूलों के समान होने के लिये आवश्यक प्रतिबंध ज्ञात कीजिये।

Find the condition that two roots of the euqation $x^3 - px + q = 0$ are equal.

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (a) सिद्ध कीजिये कि किसी समूह G में सर्वांगसमता का संबंध जो निम्न प्रकार से परिभाषित है

$$a \equiv b \pmod{H} \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$$

एक तुल्यता संबंध होता है।

Show that the relative of congruency in a group G, defined by

$$a \equiv b \pmod{H} \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$$

is an equivalence relation.

(b) आयलर प्रमेय को लिखिये तथा सिद्ध कीजिये।

State and prove that Euler's theorem.

(c) फर्मा प्रमेय को लिखिये तथा सिद्ध कीजिये।

State and prove Formate theorem.

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) निम्नलिखित को परिभाषित कीजिये एवं एक उदाहरण दीजिये :

(i) पूर्णांकीय प्रान्त

(ii) क्षेत्र

Define the following with an example :

(i) Integral domain

(ii) Field

(b) सिद्ध कीजिये एक पूर्णांकीय प्रान्त का अभिलक्षण 0 या एक अभाज्य संख्या होता है।

Prove that the characteristic of an integral domain is either zero or prime number.

(c) रिंग की परिभाषा उदाहरण सहित लिखिये।

Write down definition of Ring with examples.

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (a) सिद्ध कीजिये :

$$\sin h^{-1} x = \tan h^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Prove that :

$$\sin h^{-1} x = \tan h^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(b) निम्नलिखित श्रेणियों का योगफल ज्ञात कीजिये :

(i) $\cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta - ..... \infty$

(ii) $\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta - ..... \infty$

Find the sum of the following series :

(i) $\cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta - ..... \infty$

(ii) $\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta - ..... \infty$

(c) डी-मॉयवर प्रमेय का उपयोग करके समीकरण हल कीजिये :

$$x^7 + x^4 + x^3 + 1 = 0$$

Use De-Moivre's theorem to solve equation :

$$x^7 + x^4 + x^3 + 1 = 0$$

Printed Pages – 7

JN-174

B.Sc. (Part-I) (New Course)

Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - I

(Algebra and Trigonometry)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : प्रत्येक इकाई से दो भाग हल करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न के अंक समान हैं।

Note : Attempt any two parts from each unit is compulsory. Each question carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) प्रारम्भिक रूपान्तरण की सहायता से निम्न आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Find the inverse of the following matrix by elementary transformation :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ तो $A^6 - 4A^5 + 8A^4 - 12A^3 + 14A^2$ को A में एक रैखिक बहुपद में व्यक्त कीजिए।

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, express $A^6 - 4A^5 + 8A^4 - 12A^3 + 14A^2$ as a linear polynomial in A.

(c) निम्न आव्यूह के आइगन मान और आइगन सदिश ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Find the eigen values and eigen vectors of the following matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (a) निम्न समीकरणों को आव्यूह विधि से हल कीजिए :

$x - 2y + 3z = 6$

$3x + y - 4z = -7$

$5x - 3y + 2z = 5$

Solve the following equations by matrix method :

$x - 2y + 3z = 6$

$3x + y - 4z = -7$

$5x - 3y + 2z = 5$

(b) निम्न समीकरण को हल कीजिए :

$6x^6 - 25x^5 + 31x^4 - 31x^2 + 25x - 6 = 0$

Solve the following equation :

$6x^6 - 25x^5 + 31x^4 - 31x^2 + 25x - 6 = 0$

(c) निम्न समीकरण को कार्डन विधि से हल कीजिए :

$x^3 - 21x - 344 = 0$

Solve the following equation by Carden's method :

$x^3 - 21x - 344 = 0$

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (a) यदि R, समुच्चय A में एक तुल्यता सम्बन्ध है, तो सिद्ध कीजिए कि R^{-1} भी समुच्चय A में एक तुल्यता सम्बन्ध है।

If R is an equivalence relation in the set A, then prove that R^{-1} is an equivalence relation in the set A.

(b) यदि a, b $\in$ G तो समीकरण ax = b और ya = b, G में अद्वितीय हल रखते हैं।

If a, b $\in$ G then the equations ax = b and ya = b have unique solution in G.

(c) यदि $A = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,1\,5\,4 \end{pmatrix}$ और $B = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,1\,5\,4 \end{pmatrix}$ तो AB और BA ज्ञात कीजिए।

If $A = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,1\,5\,4 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,1\,5\,4 \end{pmatrix}$ then find AB and BA.

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) समाकारिता का मूलभूत प्रमेय लिखिए और सिद्ध कीजिए।

Write and prove fundamental theorem on homomorphism.

(b) सिद्ध कीजिए कि योग और गुणन के सापेक्ष सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय एक वलय है।

Prove that the set of all complex numbers is a ring with respect to addition and multiplication.

(c) दिखाइए कि सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय क्रमित पूर्णांकीय प्रान्त नहीं है।

Show that the set of complex numbers is not ordered integral domain.

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (a) सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan h^{-1} x = \sin h^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Prove that :

$$\tan h^{-1} x = \sin h^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(b) सिद्ध कीजिए :

$$\log \tan\left(\frac{\pi}{4} + i\frac{x}{2}\right) = i \tan^{-1}(\sin hx)$$

Prove that :

$$\log \tan\left(\frac{\pi}{4} + i\frac{x}{2}\right) = i\tan^{-1}(\sin hx)$$

(c) यदि α और β समीकरण $x^2 - 2x + 4 = 0$ के मूल हों, तब :

$$\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$$

If α and β are roots of the equation $x^2 - 2x + 4 = 0$ then prove that :

$$\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$$