(c) समीकरण

$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz + 2zx - 4xy - 2x + 4y - 2z = 3$

को असामान्य रूप में समानीत कीजिए।

Reduce the equation

$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz + 2zx - 4xy - 2x + 4y - 2z = 3$ to the normal form.

Printed Pages – 8

H-176

B.Sc. (Part-I) Examination, 2019

MATHEMATICS

Paper - III

(Vector Analysis and Geometry)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी पाँच प्रश्न हल कीजिए। प्रत्येक इकाई से दो भाग करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer all five questions. Solution of 'two' parts from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) सिद्ध कीजिए कि :

$$[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}][\bar{a}'\,\bar{b}'\,\bar{c}'] = 1$$

Prove that :

$$[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}][\bar{a}'\,\bar{b}'\,\bar{c}'] = 1$$

(b) यदि $\bar{r} = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j} + at\tan t\,\hat{k}$ तब $\left|\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|$ तथा $\left[\frac{d\bar{r}}{dt}\ \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $\bar{r} = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j} + at\tan t\,\hat{k}$ then find the value of $\left|\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|$ and $\left[\frac{d\bar{r}}{dt}\ \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right]$.

(c) सिद्ध कीजिए कि :

div grad $r^m = m\,(m+1)\,r^{m-2}$

Prove that :

div grad $r^m = m\,(m+1)\,r^{m-2}$

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (a) दिया है कि $\bar{r}(t) = \begin{cases} 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} & \text{जब } t = 2 \\ 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} & \text{जब } t = 3 \end{cases}$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_2^3 \left(\bar{r} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}\right) dt = 10$$

Given that $\bar{r}(t) = \begin{cases} 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} & \text{when } t = 2 \\ 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} & \text{when } t = 3 \end{cases}$

prove that :

$$\int_2^3 \left(\bar{r} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}\right) dt = 10$$

(b) $\int_S \left(y^2z^2\hat{i} + z^2x^2\hat{j} + x^2y^2\hat{k}\right) \cdot \hat{n}\, dS$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ S, xy-तल क ऊपर तथा इसी से घिरा हुआ गोला $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का एक भाग है।

Find the value of $\int_S \left(y^2z^2\hat{i} + z^2x^2\hat{j} + x^2y^2\hat{k}\right) \cdot \hat{n}\, dS$ where S is a part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ above the plane-xy and bounded by it.

(c) स्टॉक · प्रमेय को सत्यापित कीजिए जबकि $\bar{F} = y\hat{i} + 3\hat{j} + x\hat{k}$ तथा सतह S, गोला $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का xy-समतल के ऊपर का हिस्सा है।

Verify Stoke's theorem when $\bar{F} = y\hat{i} + 3\hat{j} + x\hat{k}$ and surface S is the part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ above the xy-plane.

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (a) शांकव $3(3x - 2y + 4)^2 + 2(2x + 3y - 5)^2 = 39$ का अनुरेखण कीजिये।

Trace the conic

$$3(3x - 2y + 4)^2 + 2(2x + 3y - 5)^2 = 39$$

(b) एक वृत्त, एक आयताकार अतिपरवलय $xy = 1$ को (x_r, y_r); $r = 1, 2, 3, 4$ पर काटता है तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x_1x_2x_3x_4 = y_1y_2y_3y_4 = 1$$

A circle cuts the rectangular hyperbola $xy = 1$ at (x_r, y_r); $r = 1, 2, 3, 4$ then prove that $x_1x_2x_3x_4 = y_1y_2y_3y_4 = 1$.

(c) यदि PSP′ और QSQ′ एक शांकव की दो परस्पर लम्बवत् नाभिगत जीवायें हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{1}{SP \cdot SP'} + \frac{1}{SQ \cdot SQ'} = \text{अचर राशि}$$

If PSP′ and QSQ′ are two mutually perpendicular focal chords of a conic then prove that :

$$\frac{1}{SP \cdot SP'} + \frac{1}{SQ \cdot SQ'} = \text{constant}$$

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) सरल रेखा $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$ और समतल $x - y + z = 5$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से बिन्दु $(-1, -5, -10)$ की दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the distance of the point (–1, –5, –10) from the point of intersection of the line $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{12}$ and the plane $x-y+z=5$.

(b) शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (α, β, γ) और निर्देशक वक्र परवलय $y^2 = 4ax$, $z = 0$ है।

Find the equation of the cone whose vertex is (α, β, γ) and guiding curve is the parabola $y^2 = 4ax$, $z = 0$.

(c) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके जनक सरल रेखा $x=-\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ के समान्तर हैं तथा जिसका निर्देशक वक्र दीर्घवृत्त $x^2 + 2y^2 = 1$, $z = 3$ है।

Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to straight line

$x=-\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ and guidng curve is the ellipse $x^2 + 2y^2 = 1$, $z = 3$.

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (a) समतल $\ell x + my + nz = p$ के शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।

Find the condition that the plane $\ell x + my + nz = p$ will touch the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

(b) बिन्दु (–1, 0, 3) से होकर जाने वाली, अति परवलयज $yz + 2zx + 3xy + 6 = 0$ की जनक रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the generating lines of the hyperboloid $yz + 2zx + 3xy + 6 = 0$ which pass through the point (–1, 0, 3).