

**I-205**

**B.Sc. (Part-II) Examination, 2020**

**MATHEMATICS**

**Paper - I**

**(Advanced Calculus)**

**Time Allowed : Three Hours**

**Maximum Marks : 50**

**Minimum Pass Marks : 17**

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न के किन्हीं दो भागों को

हल कीजिए। सभी प्रश्न के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Solve any two parts of each question. All questions carry equal

marks.

**इकाई-I / UNIT-I**

Q. 1. (a) सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{(m+1)(m+2) \dots (m+n)\}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}$$

(2)

Prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{(m+1)(m+2) \dots (m+n)\}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}$$

(b) दिखाइये कि श्रेणी  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{\sqrt{n^2+1} - n\}$  प्रतिबन्धी

Maximum Marks 20

अभिसारी है।

Show that the series  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{\sqrt{n^2+1} - n\}$

is conditionally convergent.

Solve

(c) दिखाइये कि श्रेणी

$$x^2(\log 2)^n + x^3(\log 3)^n + x^4(\log 4)^n + \dots, x > 0$$

अभिसारी होगी यदि  $x < 1$  और अपसारी होगी यदि

$$x \geq 1$$

I-205

205-I

(3)

Show that the series

$$x^2(\log 2)^n + x^3(\log 3)^n + x^4(\log 4)^n + \dots, x > 0$$

is convergent if  $x < 1$  and divergent if  $x \geq 1$ .

इकाई-II / UNIT-II

Q. 2. (a) निम्न फलन  $f(x)$  का  $x = 0$  पर सातत्य परीक्षण

कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 \tan x, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

Test the following function for continuity at

$$x = 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 \tan x, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

I-205

P.T.O.

(4)

(b) अन्तराल  $[a, b]$  में फलन  $f(x) = \log \frac{x^2 + ab}{(a+b)x}$  के

लिये रोले प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

Verify Rolle's theorem for the function

$f(x) = \log \frac{x^2 + ab}{(a+b)x}$  in the interval  $[a, b]$ .

(c) लाग्रान्ज के मध्यमान प्रमेय :

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(r)$$

में  $r$  का मान ज्ञात कीजिए, यदि  $f(x) = Ax^2 + Bx +$

$C$ , जहाँ  $A, B, C$  अचर हैं तथा  $A \neq 0$

If  $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ , where  $A, B, C$  are

constants and  $A \neq 0$ , then find the value of  $r$

in Lagrange's mean value theorem

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(r)$$

(5)

इकाई-III / UNIT-III

Q. 3. (a) यदि  $x^x y^y z^z = c$ , तो दर्शाइये कि  $x = y = z$  पर

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log x)^{-1}$$

If  $x^x y^y z^z = c$ , then show that

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log x)^{-1} \text{ when } x = y = z.$$

(b) समीकरण  $(1+x^2)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x(1+x^2) \frac{dy}{dx} + y = 0$

का रूपान्तरण  $x = \tan z$  रखकर कीजिए।

Transform the equation

$$(1+x^2)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x(1+x^2) \frac{dy}{dx} + y = 0$$

by putting  $x = \tan z$ .

(c) यदि  $u = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $v = x + y + z$ ,

$w = xy + yz + zx$  दर्शाइये कि जैकोबियन

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0, u, v \text{ और } w \text{ के बीच सम्बन्ध ज्ञात}$$

कीजिए।

(6)

If  $u = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $v = x + y + z$ ,

$w = xy + yz + zx$ , show that the

Jacobian  $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = 0$ . Find the relation

between  $u$ ,  $v$  and  $w$ .

इकाई-IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  के केन्द्रज का समीकरण  
ज्ञात कीजिए।

Find the evolute of the hyperbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(b) फलन  $u = x^4 + 2x^2y - x^2 + 3y^2$  के उच्चिष्ठ या  
निम्निष्ठ होने की विवेचना कीजिए।

Discuss the maxima or minima of the  
function  $u = x^4 + 2x^2y - x^2 + 3y^2$ .

(c) सिद्ध कीजिए कि एक गोले के अन्तर्गत महत्तम आयतन  
वाला आयताकार एक घन होता है।

I-205

(7)

Prove that the rectangular solid of maximum

volume that can be inscribed in a sphere is

a cube.

इकाई-V / UNIT-V

Q. 5. (a) सिद्ध करो कि :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x \log\left(\frac{1}{x}\right)}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Prove that :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x \log\left(\frac{1}{x}\right)}} dx = \sqrt{2\pi}$$

(b) द्विशः समाकल  $\iint_R e^{2x+3y} dx dy$  का मान ज्ञात

कीजिए, जहाँ  $R$ , रेखाओं  $x = 0$ ,  $y = 0$  तथा

$x + y = 1$  से परिबद्ध त्रिभुजीय क्षेत्र है।

I-205

P.T.O.

(8)

Find the value of double integral

$$\iint_R e^{2x+3y} dx dy, \text{ where } R \text{ is the region}$$

bounded by  $x = 0$ ,  $y = 0$  and  $x + y = 1$ .

(c) निम्नलिखित समाकलन का मूल्यांकन समाकलन के क्रम

को बदलकर कीजिए :

$$\int_0^a \int_y^a \frac{x dy dx}{x^2 + y^2}$$

Evaluate the following integral by changing

the order of integration :

$$\int_0^a \int_y^a \frac{x dy dx}{x^2 + y^2}$$